बच्चों के साथ बीजगणितीय चिंतन

– शालीन मिश्र

बहुत दिनों से साथियों से बात हो रही थी कि विद्यालय में बच्चों के साथ काम करते हुए अनुभव लिखे। पहले विद्यालय में जाकर जिस कक्षा के बच्चों के साथ काम करना है उनके बारे में जानूं–समझूं। मैंने बच्चों के बारे में जानने व कक्षा शिक्षण के लिए जूनियर हाईस्कूल बड़वा को चुना जिसके लिए मेरे पास कुछ आधार थे–

- इस विद्यालय के कक्षा–6 में सात बच्चे हैं जो प्राथमिक विद्यालय बड़वा से आये हैं। प्राथमिक विद्यालय बड़वा अच्छे विद्यालयों में गिना जाता है तो सोचा कि यहां बीजगणित को लेकर कुछ काम किया जा सकता है।
- इस विद्यालय में गणित पढ़ाने वाले शिक्षक टी.एल.सी. में नहीं आते हैं। इस बार प्रयास करने के बावजूद उन्होंने नाम तो दिया पर प्रतिभाग नहीं किया तो उद्देश्य था कि हम उनके साथ कक्षा में कुछ काम करें ताकि वो हमारे साथ जुड़ पायें।

इसके बाद मैंने को–डेव के माड्यूल के एक असाइनमेंट बीजगणितीय चिंतन को लेकर कक्षा–6 के बच्चों के साथ एक–एक घंटे का समय लेकर दो दिन काम करने का फैसला किया।

पहला दिन

दिनांक : 05 फरवरी

समय : 1 घंटा

बच्चे : 7

शिक्षकः जसवंत सिंह

सबसे पहले प्रधानाध्यापक को मैंने अपने आने का उद्देश्य बताया। उनके साथ बातचीत के बाद उन्होंने जसवंत सर से बातचीत करके हमें अनुमति दे दी। मैंने जसवंत सर को स्पष्ट किया कि हम किसी भी तरह के मूल्यांकन के लिए नहीं आये हैं। हम और आप मिलकर बच्चों के साथ बीजगणितीय चिंतन पर कुछ काम करेंगे। मैंने उनसे अनुरोध किया कि वो भी कक्षा में उपस्थित रहें। जसवंत सर मुझे कक्षा में ले गए जहां सात बच्चे बैठे थे जिसमें 4 बालिकाएं व 3 बालक उपस्थित थे। प्रधानाध्यापक भी उस दिन उसी कक्षा में मौजूद रहे।

सबसे पहले बच्चों के साथ माहौल बनाने के लिए मैंने उनसे बातचीत शुरू की। मैंने बच्चों से पूछा कि कौन–कौन मुझे जानता है? एक बालिका ने कहा सर, हम जानते हैं आप पहले प्राथमिक विद्यालय में आये थे और कोण समझाया था। इस पर मैंने कहा कि वो तो पिछले साल की बात है। फिर मैंने कहा कि मैं तो आप सब लोगों को जानता हूं। आप सबने मिलकर मुझे एक नाटक करके दिखाया था। सभी बच्चे एक साथ चिल्ला उठे– हां सर, हां सर याद आ गया। आप दिसंबर में आए थे तब हमने नाटक करके दिखाया था। अब बच्चों के

चेहरे पर रौनक बढ़ती दिख रही थी क्योंकि वे परिचित व्यक्ति से मिल रहे थे। जिसके बाद मैंने अपना नाम बताया व सभी बच्चों ने भी अपना नाम बताया।

बच्चों के पूर्व ज्ञान को जानने के लिए मैंने उनसे सवाल किया कि बीजगणित किस–किस ने पढ़ी है? सभी बच्चों ने एक साथ हामी भरी। मैंने अगला सवाल किया कि बीजगणित क्या है? अब बच्चों के चेहरे पर शिकन दिखनी शुरू हुई। मैंने कहा डरने की कोई जरूरत नहीं है जो पता हो बताओ। जसवंत सर भी परेशान हो रहे थे और कह रहे थे डरो मत, बोलो, जो पढ़ाया है वो बताओ। सर के कहने पर एक बालिका ने बताया कि जी हम उसमें a, b, c, d का प्रयोग करते हैं पर वो आगे कुछ नहीं बता पायी। मैंने पूछा कि किसने बताया? इस पर बच्ची ने कहा जी, सर जी ने बताया। मैंने कहा क्या ये सही कह रही है? बाकी बच्चों ने भी कहा हां क्योंकि सर ने बताया है। इस पर मेरा सवाल था कि सर ने बताया तो सही ही होगा? सर जो कहेंगे वो हम मान लेंगे? बच्चों ने कहा हां। मैंने कहा अगर सर सूरज को चांद कहेंगे तो हम मान लेंगे? बच्चों ने कहा नहीं, हमको भी दिख रहा है। इस बात को आगे बढ़ाते हुए मैंने कहा कि हम किसी की बात को यू ही नहीं मान लेते, अपना दिमाग भी लगाते हैं। इसके पहले कि बच्चों को uncomfortable feel हो, मैंने बात बदल दी।

मैंने कहा अच्छा छोड़ो इस बात को अब हम एक पहेली हल करते हैं।

गाय सब लोगों ने देखी है?– हां देखी है।

गाय के कितने पैर होते हैं?– चार।

गाय के कितने सिर होते हैं?– एक।

अब मैंने पहेली रखी गाय का एक झुंड जा रहा था। एक बच्चे ने उनके पैरों व सर की संख्याओं को जोड़कर गिना तो 35 पाया। बताओ झुंड में कितनी गायें थीं? बच्चे फटाफट अपनी कापी निकालकर करने में जुट गये। मैंने बच्चों से कहा जिससे मैं पूछूंगा वही बताएगा?

सभी बच्चों से पूछने पर पता चला कि सब लोगों का उत्तर 7 आया है। फिर मैंने सभी बच्चों से बारी–बारी से पूछा कि उन्होंने उत्तर कैसे निकाला? बच्चों ने कहा कि हमने 35 में 5 से भाग दे दिया।

मैंने फिर पूछा कि 5 से ही भाग क्यों दिया? इस पर बच्चों ने कहा कि चूंकि एक गाय के चार पैर होते हैं और एक सर होता है इसलिए 5 से भाग दिया क्योंकि 5 मिलकर एक गाय बना रहा है।

मैंने अगला सवाल रखा कि अगर पैरों व सिरों का जोड़ 40 हो तो कितनी गायें होगीं? बच्चों ने कहा 8। मैंने फिर एक एक बच्चे से सवाल किया कि ऐसा क्यों? सबने कहा कि हमने 40 में 5 से भाग किया।

मैंने सवाल को आगे बढ़ाया और कहा कि अगर पैरों व सिरों का जोड़ 100 हो तो कितनी गायें होगीं? बच्चों ने कहा 20। मैंने फिर एक एक बच्चे से सवाल किया कि ऐसा क्यों? 5 बच्चों ने कहा कि हमने 100 में 5 से भाग किया। 2 बच्चों ने कहा कि 40 में 8 गाये थीं, दूसरे 40 में 8 गाये थीं तो 80 में हो गयीं 16 गाय और बाकी 20 में 4 गाय। इसलिए 8, 8 व 4 बराबर 20 हो गया। अब बच्चों को भी मजा आ रहा था।

मैंने कहा कि यदि मैं संख्या को बढ़ाकर लाखों व करोड़ो में ले जाऊं तो कैसे निकालेंगे? सभी बच्चों ने एक साथ उत्तर दिया 5 से भाग देकर। अब क्या इसको ऐसे भी लिख सकते हैं?

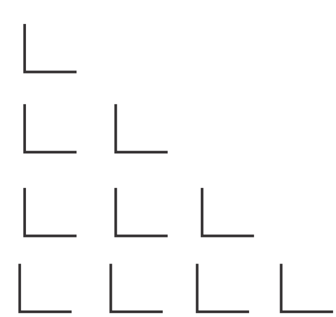
गायों की संख्या = पैरों व सिरों की संख्या/5

इसके बाद मैंने कहा कि अगर हमारे पास गायों की संख्या हो तो क्या हम उनके पैरों व सिरों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं? सभी बच्चों ने एक साथ कहा हां। हम गायों की संख्या को 5 से गुणा करेंगे और मैंने बोर्ड पर लिखा–

पैरों व सिरों की संख्या = 5 x गायों की संख्या

चर्चा को आगे बढ़ाते हुए मैंने कहा चलो एक और सवाल हल करते हैं। मैंने पूछा कि A,B, C, D.... किस को आती है? सभी बच्चों ने एक साथ हाथ उठाया। इस पर मेरा सवाल था कि बडा L कैसे बनाते हैं? एक बच्चे ने बोर्ड पर आकर बनाया। मैंने फिर सवाल किया कि अगर इस L को माचिस की तीलियों से बनाएं तो कितनी तीली लेंगे? बच्चों ने झट से कहा– दो।

मैंने बोर्ड पर दो L बनाए और पूछा कि अब कितनी तीली? बच्चों ने कहा– चार। इस प्रकार मैं बोर्ड पर बनाता गया और उनसे पूछता गया, बोर्ड पर लिखता गया।



2 तीली

4 तीली

6 तीली

8 तीली

मैंने पूछा कि ऐसे 5 L बनाने होंगे तो कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी? बच्चों ने कहा 10। मैंने बच्चों की कापी देखी तो पाया कि उन्होंने 5 L बनाकर देखे थे फिर उत्तर दिया था।

मैंने पूछा कि 10 L के लिए कितनी तीलियों की जरुरत होगी? बच्चों ने कहा कि 20। उत्तर का कारण पूछने पर एक बच्चे को छोड़कर सबने कहा कि हमने 10 को 2 से गुणा कर दिया। पूछे जाने पर उन्होंने बताया कि चूंकि एक L में दो तीलियां लगती हैं इसलिए 10 L में 20 तीलियां लगेंगी। सिर्फ एक बच्चों ने 10 L बनाकर उत्तर निकाला था।

फिर मैं 20, 40, 60 व 100 के लिए पूछता चला गया और बच्चे बताते चले गए। अब सारे बच्चे बिना L बनाये उत्तर निकाल रहे थे। जिसके बाद मैंने उनसे पूछा कि यदि संख्या लाखों करोड़ों में हो तो हम तीलियों की संख्या कैसे पता करेंगे? सभी बच्चों ने एक साथ उत्तर दिया उन्होंने कहा सर दो से गुणा करके। इसके बाद मैंने बोर्ड पर लिखा–

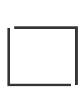
2 X L की संख्या = तीलियों की संख्या

इसी चर्चा को आगे बढ़ाते हुए मैंने M के लिए पूछा और ऊपर की प्रक्रिया को दोहराया। अब बच्चे उसे कर पा रहे थे, पैटर्न ढूंढकर निकाल पा रहे थे। सामान्यीकरण के लिए पूछे जाने पर उन्होंने खुद ही निम्न सूत्र निकाल कर बताया–

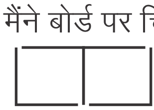
4 X M की संख्या = तीलियों की संख्या

इसको आगे बढ़ाते हुए मैंने कहा कि इस प्रकार पैटर्न को ढूंढकर सामान्यीकरण करना ही बीजगणितीय चिंतन है। यहां हम L व M की संख्या के लिए a,b,x,y आदि का प्रयोग कर लेते हैं जैसा कि आप के सर ने भी बताया था। अब बच्चों के चेहरे पर खुशी थी कि अरे ये सब तो हमको आता था।

मैंने पूछा क्या हम एक और सवाल हल कर सकते हैं ? जोर से आवाज आयी हां जी। मैंने बोर्ड पर एक वर्ग बनाया और उसमें लगने वाली तीलियों की संख्या पूछी? बच्चों ने कहा– चार।



मैंने बिना बोर्ड पर बनाए दो वर्गों के लिए पूछा तो उन्होंने बताया आठ। फिर मैंने बोर्ड पर चित्र बनाया–



अब पूछा कि कितने वर्ग हैं? बच्चों ने कहा– दो।

मैंने पूछा तीलियां कितनी लगीं? बच्चों ने कहा– सात।

इस पर मैंने सवाल किया कि आप ने तो पहले आठ कहा था अब सात कैसे हो गया? एक बच्ची ने कहा सर दोनों वर्ग जुड़े हैं। मैंने कहा इसी तरह अगर मुझे तीन वर्ग बनाने हो तो तीलियां कितनी लगेंगी? सभी बच्चों ने चित्र बनाकर बताया 10।

चर्चा को आगे बढ़ाते हुए मैंने कहा कि यदि इसी तरह से मुझे 4, 5, आदि के लिए बनाना तो तीलियों की संख्या कैसे पता करेंगे? एक घंटा होने को था और बच्चो के लंच का समय हो गया था इसलिए मैंने उन्हें गृहकार्य के लिए दो सवाल दिए–

- 25 वर्ग के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी?
- पैटर्न पहचानकर सामान्यीकरण क्या होगा?

इसके बाद मैंने शिक्षक से बातचीत की। उन्होंने इस प्रयास को सराहा। उनका कहना था कि सीधे विषय शुरू करने की जगह हमें इसी तरह से उनके परिवेश से जोड़कर चलना चाहिए। उनसे अगले दिन पुनः मिलने का वादा कर हमने शिक्षकों से विदा ली।

दूसरा

दिनांकः 07 फरवरी,

समयः 1 घंटा,

बच्चेः 6

शिक्षकः जसवंत सिंह

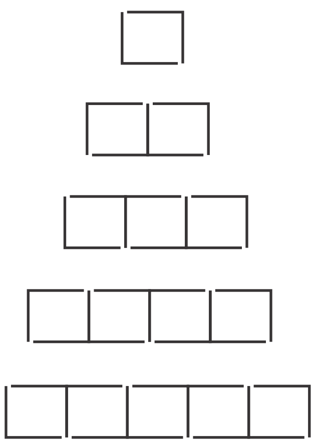
विद्यालय पहुंचते ही पहले प्रधानाध्यापक व जसवंत सर से मुलाकात की। उनसे 05 फरवरी के शिक्षण के बाद बच्चों की प्रतिक्रिया जानने का प्रयास किया गया। उसके बाद हम लोग बच्चों के साथ बीजगणितीय चिंतन पर किये गए काम को आगे बढ़ाने के लिए कक्षा में चले गए। आज कक्षा में 6 बच्चे उपस्थित थे जिसमें से 4 बालिकाएं थी व 2 बालक।

सबसे पहले बच्चों से पिछले शिक्षण में दिए गए सवालों पर बातचीत की गई। सभी बच्चों ने उस काम को किया था।

सभी बच्चों ने बताया कि 25 वर्ग बनाने के लिए हम 76 तीलियों की जरुरत होगी। एक बच्चे को बोर्ड पर बुलाकर समझाने को कहा गया। बच्चे ने कहा कि हम 3 से 35 को गुणा करेंगे और 1 जोड़ देंगे तो हम 76 प्राप्त होगा। मैने कहा पर ऐसा क्यों करेंगे तो बच्चा उत्तर नहीं दे पाया। इसके बाद बारी–बारी से सभी बच्चों को बोर्ड

पर बुलाकर समझाने को कहा गया और एक को छोड़कर सभी ने यही किया। जिसे देखने पर लगा कि शिक्षक द्वारा बच्चों की मदद की गई है पर बच्चों को कारण स्पष्ट नहीं है। उस बच्चे द्वारा बताया गया कि पहले वर्ग में 4 तीलियां लग रही हैं और उसके बाद में प्रत्येक में तीन। इसलिए हम 3 से 35 को गुणा करेंगे और 1 जोड़ देंगे तो हम 76 प्राप्त होगा।

इसी चर्चा को आगे बढ़ाते हुए मेरे द्वारा बोर्ड पर पुनः वर्ग बनाकर इस प्रकार लिखा गया–



4 तीली

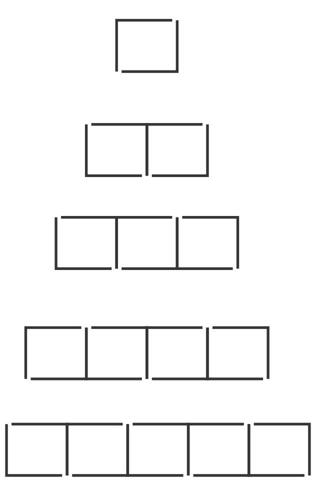
7 तीली

10 तीली

13 तीली

16 तीली

बच्चों से बातचीत करके पूछा गया कि क्या हम 4 को 3 धन 1, 7 को 6 धन 1 लिख सकते हैं। बच्चों का जवाब हां था। इसी क्रम में उनसे पूछ–पूछ कर आगे भी लिखा गया जो इस प्रकार था–



4 तीली = 3 + 1

7 तीली = 6 + 1

10 तीली = 9 + 1

13 तीली = 12 + 1

16 तीली = 15 + 1

बच्चों को पैटर्न पहचानने को कहा गया। एक बच्ची ने कहा जी एक तरफ 3 का पहाड़ा चल रहा है और एक जुड़ रहा है। उसी बच्ची की बात को आगे बढ़ाते हुए बोर्ड पर इस तरह लिखा गया–

4 तीली = 3 + 1 = 3 x 1 + 1

7 तीली = 6 + 1 = 3 x 2 + 1

10 तीली = 9 + 1 = 3 x 3 + 1

13 तीली = 12 + 1 = 3 x 4 + 1

16 तीली = 15 + 1 = 3 x 5 + 1

इसके बाद बच्चों से पैटर्न का सामान्यीकरण करने को कहा गया जिसे बच्चों ने अपनी कॉपी पर लिखा जो इस प्रकार था–

3 X वर्गों की संख्या + 1 = तीलियों की संख्या

अब बच्चे समझ पा रहे थे कि 3 से गुणा क्यों किया गया व 1 क्यों जोड़ा गया। इसके बाद चर्चा को आगे बढ़ाते हुए एक त्रिभुज बनाया गया व उसके अंतःकोणों का योग पूछा गया।

बच्चों ने कहा– 180^{0}।

फिर मेरे द्वारा बोर्ड पर एक आयत बनाया गया व उसके अंतःकोणों का योग पूछा गया।

बच्चों के कहा– 360^{0}।

मेरे द्वारा सवाल किया गया कि कैसे पता कि 360^{0} होगा। इस पर बच्चों का जवाब था जी सर ने बताया था। मेरे द्वारा पुनः पिछले शिक्षण का उदाहरण दिया गया कि सर ने बताया तो सही ही होगा? सर जो कहेंगे वो हम मान लेंगे? बच्चों ने कहा हां। मैंने कहा अगर सर सूरज को चांद कहेंगे तो हम मान लेंगे? बच्चों ने कहा नहीं, हमको भी दिख रहा है। इस बात को आगे बढ़ाते हुए मैंने कहा कि हमें किसी की बात को यूं ही नहीं मान लेना चाहिए हमें अपने आप भी सोचना चाहिए। एक बच्ची ने कहा सर जी इसके चारों कोण 90 अंश के हैं इसलिए 360^{0} होगा। मैंने फिर अगला सवाल किया गया कि यदि हम आयत न लेकर कोई भी चतुर्भुज लें तो अंतः कोणों का योग कितना होगा फिर उसी बच्ची का जवाब 360^{0} ही था लेकिन वह उसका कारण नहीं बता पायी। इसके बाद मेरे द्वारा चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बांटा गया और बताया कि एक त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180^{0} है तो दो का 360^{0} होगा इसलिए किसी भी चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग 360^{0} होगा। इसके बाद मैंने बोर्ड पर पंचभुजी व षष्ठभुजी बनाया और उसमें त्रिभुज बनाकर कोणों का योग निकालने को कहा। बच्चों द्वारा निकाले गए उत्तरों को बोर्ड पर लिखा गया।

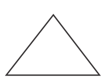
जिसे शिक्षक कमजोर मानते थे उस बच्चे ने भी सवाल हल हल कर दिया था और उसके इस जवाब से जसवंत सर भी उत्साहित थे। एक बच्ची ने षठभुजी को जोड़कर त्रिभुज तो सही बनाये पर जब व उसे बोर्ड पर कर रही थी तो उसने लिखा–

$4 \times 180^0 = 680^0$

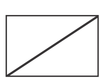
उस बच्ची को दोबारा जांचने को कहा गया पर शायद उसे पहाड़े पढ़ने में दिक्कत हो रही थी। मैंने कक्षा से 4 बच्चों को बुलाकर दोनों हाथों को आगे करके खड़े होने को कहा। सभी बच्चों को दोनों हाथों की 4–4 अंगुलियों को खोलकर व अंगूठा अंदर करने को कहा। अब उस बच्ची को इन बच्चों की अंगुलियां गिनने को कहा गया। बच्ची ने 32 गिना और फिर बोर्ड पर सही करके लिख दिया।

$4 \times 180^0 = 720^0$

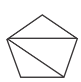
इस चर्चा के आधार पर बोर्ड पर इस प्रकार से लिखा गया–



$1 \times 180^0 = 180^0$



$2 \times 180^0 = 360^0$



$3 \times 180^0 = 540^0$

$4 \times 180^0 = 720^0$

मेरे द्वारा बच्चों को सात भुजाओं वाली आकृति बनाकर उसके अंतः कोणों का योग निकालने को कहा गया। इस बार भी सबसे पहले शिक्षक के अनुसार सबसे कमजोर बच्चे ने ही किया। उसने अपनी कॉपी पर सात भुजाओं वाली आकृति बनाकर उसमें 5 त्रिभुज बनाये और कोणों का योग 900^0 निकाल दिया। जबकि बाकी बच्चों को व शिक्षक के अनुसार सबसे तेज़ बच्ची को भी समस्या हो रही थी।

उस बच्चे ने बोर्ड पर भी बनाकर सभी बच्चों को बताया। इसके बाद बच्चों से सवाल किया गया कि अगर भुजाएं बढ़ती जाएंगी तो हम कोणों का योग कैसे निकालेंगे? क्या हम हर बार चित्र बनाकर उसे त्रिभुज बनाकर ही निकालेंगे?

एक बच्चे ने जवाब दिया कि नहीं हम सामान्यीकरण करके निकाल सकते है फिर सभी बच्चों से पैटर्न पहचानकर सामान्यीकरण करने को कहा गया। यहां बच्चों को सामान्यीकरण करने में दिक्कत हो रही थी। जिसके बाद मैंने उसे तालिका में इस प्रकार लिखकर पैटर्न पहचानने को कहा–

भुजाओं की संख्या	त्रिभुजों की संख्या	अंतः कोणों का योग	
3	1	1×180^0	$= 180^0$
4	2	2×180^0	$= 360^0$
5	3	3×180^0	$= 540^0$
6	4	4×180^0	$= 720^0$
7	5	5×180^0	$= 900^0$

बच्चों से भुजाओं की संख्या व त्रिभुजों की संख्या में आने वाले अंतर पर ध्यान दिलाया गया। सभी बच्चों ने कहा जी सर दो का अंतर है। यानी भुजाओं की संख्या से 2 घटाने पर त्रिभुजों की संख्या प्राप्त हो रही है इसलिए इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं–

अंतः कोणों का योग = (भुजाओं की संख्या –2) $\times 180^0$

बच्चों के साथ काम करने के बाद शिक्षक से बातचीत की गई। उन्हें इस काम को आगे बढ़ाने के लिए कहा। उन्होने इस प्रयास को सराहा। वो दो दिन की बातचीत से इतना प्रभावित हुए कि उन्होंने झट से पूछ लिया कि गणित की अगली कार्यशाला कब से है? जरुर आऊंगा। मैंने कहा कि हम कार्यशाला ग्रीष्मकालीन व शीतकालीन छुट्टियों में ही करते हैं। इस तरह के सत्र हम हर माह एक बार टीचर लर्निंग सेंटर पर भी करते हैं आप चाहें तो उसमें प्रतिभाग कर सकते हैं। हमारी इस गतिविधि से जसवंत सर काफी उत्साहित थे व टीचर लर्निंग सेंटर में आकर गतिविधियों में प्रतिभाग करने का वादा भी किया, मैंने सभी शिक्षकों से विदा लेते हुए बच्चों से जल्दी मिलने का वादा किया और निकल पड़ा।

(लेखक अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन देहरादून से जुड़े हैं)