डायरी/अनुभव

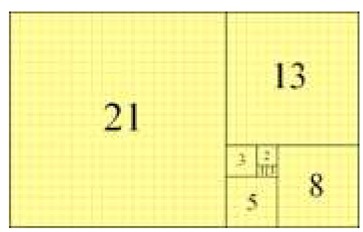
पैटर्नः मेरे अनुभव मेरे विचार

– शालीन मिश्रा

पैटर्न शब्द सुनते ही हमारे मन–मस्तिष्क में अंकों, आकारों या दिशाओं से संबंधित पैटर्न आते हैं। ये पैटर्न हमारे आम जीवन से जुड़े हुए हो भी सकते हैं और नहीं भी। यदि हम अपने आसपास गौर से देखें तो हमें अनेकों पैटर्न दिखाई देंगे जैसे हमारी दिनचर्या, हमारे आस–पड़ोस के मकान, सड़कों पर चलने वाले दुपहिया एवं चौपहिया वाहन, पेड़ों की पत्तियां/रंग/बनावट आदि। यदि हम विषय विशेष की बात करें तो गणित एक विषय है जो कि पूरी तरह से पैटर्न आधारित है। इस विषय को सीखने समझने के बड़े उद्देश्यों या कौशलों में से सबसे महत्वपूर्ण कौशल पैटर्न को पहचानना व उसके सामान्यीकृत नियमों को खोज पाना भी है। **एन.सी.एफ. 2005 के अनुसार ''अंकों व अंक संक्रियाओं की बातें करते हुए गणित के अंकहीन क्षेत्रों को भी उचित स्थान दिया जाना चाहिए।** इसमें आकार, दिक् संबंधी समझ, पैटर्न, मापन तथा आंकड़ों की हैंडलिंग शामिल है। उच्च कक्षाओं में ज्यामिति की प्रस्तावना के रूप में केवल आकारों और उनके गुणों के साथ कार्य करना ही पर्याप्त नहीं है। यह भी महत्त्वपूर्ण है कि संबंधित शब्दों की शब्दावली तैयार की जाए जो बच्चे की दिक् स्थान (spatial sense) की समझ बढ़ा सके। पैटर्न की पहचान गणित के लिए अहम है। पुनरावृत्ति करने वाले साधारण आकार वाले पैटर्नों से शुरू करके बच्चा जटिल पैटर्न की ओर बढ़ सकता है जिसमें आकार तथा संख्याएँ दोनों शामिल होंगे। यह उस सोचने के तरीके की नींव रखता है जिसे हम बीजगणित कहते हैं। प्राथमिक पाठ्यचर्या जो ऐसी गतिविधियों से समृद्ध होती है, निश्चित रूप से माध्यमिक अवस्थाओं में बीजगणित की ओर प्रस्थान को अपेक्षाकृत सरल बनाती है।

आमतौर पर पैटर्न को लेकर शिक्षक साथियों का मानना है कि पैटर्न बहुत महत्वपूर्ण है इसलिए इसे बच्चों के पाठ्यक्रम का हिस्सा होना चाहिए। जिस कारण से पैटर्न कक्षा एक से ही किताबों का हिस्सा बन चुका है। चलिए पैटर्न संबंधी कुछ सवालों पर कुछ गौर करते हैं। क्या पैटर्न सिर्फ किताबों में होता है या हमारे परिवेश में भी है? और क्या पैटर्न अंकगणित में ही होता है? आदि। अगर हम देखें तो हम सभी ने पैटर्न को समझने के लिए कई तरह के सवाल हल किये होंगे जिसमें अंक पैटर्न के अलावा चित्र पैटर्न भी हो सकते हैं। पर क्या वही पैटर्न है? पहले अंकगणित, बीजगणित व रेखागणित को अलग–अलग शाखाओं के रुप में देखा जाता था पर आजकल गणितज्ञ लोग अलग–अलग पैटर्नों (अंकों, चित्रों व ज्यामिति में) को देख कर, कुछ संकेतों का इस्तेमाल कर, उनका सामान्यीकरण करते हैं और उसे ही बीजगणित के रूप में देखते हैं।

परिवेश में हमें कई तरह के पैटर्न के उदाहरण मिलते हैं। जैसे घरों में टाईल्स का लगाना, पेड़ों की पत्तियां, फूलों में, आदि। फिबोनाकी नाम का पैटर्न भी आमतौर पर परिवेश में पाया जाता है जो कुछ इस प्रकार होता है– 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34....



अपने आस–पास की वस्तुओं को यदि देखें तो उनमें भी यह स्पष्ट तौर पर दिखता है जैसे :

गणित में यदि हम पहाड़ों को लेकर बात करें तो इनमें भी कई तरह के पैटर्न हमें मिलते हैं। इस लेख में हम पहाडों में पैटर्न पर बातचीत करेंगे। जब मुझे बचपन में 1 से 10 के पहाड़े लिखने को कहा जाता था तो मैं उन्हें एक पैटर्न के आधार पर लिखता था जो इस प्रकार है–

2 x 1 = 2	3 x 1 = 3	4 x 1 = 4	5 x 1 = 5
2 x 2 = 4	3 x 2 = 6	4 x 2 = 8	5 x 2 = 10
2 x 3 = 6	3 x 3 = 9	4 x 3 = 12	5 x 3 = 15
2 x 4 = 8	3 x 4 = 12	4 x 4 = 16	5 x 4 = 20
2 x 5 = 10	3 x 5 = 15	4 x 5 = 20	5 x 5 = 25
2 x 6 = 12	3 x 6 = 18	4 x 6 = 24	5 x 6 = 30
2 x 7 = 14	3 x 7 = 21	4 x 7 = 28	5 x 7 = 35
2 x 8 = 16	3 x 8 = 24	4 x 8 = 32	5 x 8 = 40
2 x 9 = 18	3 x 9 = 27	4 x 9 = 36	5 x 9 = 45
2 x 10 =20	3 x 10 =30	4 x 10 =40	5 x 10 =50

अगर हमें 2 के बाद 3 का पहाड़ा लिखना हो तो हम 2 के पहाड़े में आई संख्याओं को 2 के समूहों की संख्या में जोड़ देंगे जैसा कि ऊपर लाल रंग से दिखाया गया है। इसी तरह से हम 3 के पहाड़े से 4, 4 से 5, आदि तक जाया करते थे।

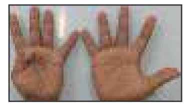
एक विद्यालय भ्रमण में एक बच्चे ने मुझे 9 का पहाड़ा जल्दी और सीधे लिखना सिखाया। वो कुछ इस प्रकार से था कि आप उपर से नीचे की तरफ 0 से 9 तक की गिनती लिख लो फिर नीचे से उपर को 0 से 9 लिख लो, और बन गया पहाड़ा।

09
18
27
36
45
54
63
72
81
90

इसी तरह से एक बच्चे ने पहाड़ा कुछ इस तरीके से बताया–

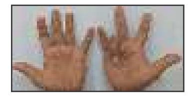
Hand Position

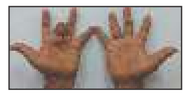
$(\text{Adler})^{-n}$ - Subtract


9 x 1 = 9

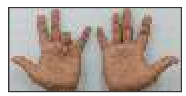
9 x 6 = 54

9 x 2 = 18


9 x 7 = 63


9 x 3 = 27

9 x 8 = 72


9 x 4 = 36

9 x 9 = 81

9 x 5 = 45

9 x 10 = 90

जरा सोचो तो ऐसा कैसे हुआ? दरसल पहली स्थिति में बाएं ओर से हाथ में फोल्ड उंगली के बाएं ओर कुछ नहीं है अतः दहाई के स्थान पर 0 और फोल्ड उंगली के दायीं ओर 9 खुली उंगली हैं अतः इकाई के स्थान पर 9 आयेगा। इसलिए संख्या बनी 09। इसी तरह से अगली स्थिति में बाएं ओर से हाथ में फोल्ड उंगली के बाएं ओर 1 खुली उंगली है अतः दहाई के स्थान पर 1 और फोल्ड उंगली के दायीं ओर 8 खुली उंगली हैं अतः इकाई के स्थान पर 8 आयेगा। इसलिए संख्या बनी 18, इत्यादि।

इसी वर्ष एक प्रशिक्षण के दौरान पैटर्न पर बात चली तो पहाड़ों का जिक्र भी आया। जिस पर चर्चा के बाद प्रतिभागियों ने 9, 19, 29, 39 आदि का पहाड़ा लिखने का पैटर्न बनाया जो कुछ इस प्रकार था।

9×1=09	19×1=19	29×1=29
9×2=18	19×2=38	29×2=58
9×3=27	19×3=57	29×3=87
9×4=36	19×4=76	29×4=116

9×5=45	19×5=95	29×5=145
9×6=54	19×6=114	29×6=174
9×7=63	19×7=133	29×7=203
9×8=72	19×8=152	29×8=232
9×9=81	19×9=171	29×9=261
9×10=90	19×10=190	29×10=290

इन पहाड़ों में पैटर्न देखने पर पता चला कि पहाड़ा चाहे 9 का हो या 19 का दोनों में नीचे से ऊपर को 0 से 9 लिखना है। अगर 9 का पहाड़ा लिख रहे हैं तो दहाई के स्थान पर ऊपर से नीचे की तरफ 0 से 9 तक की संख्या लिखनी है पर 19 के लिए हम ऊपर से नीचे की तरफ 1 से शुरु करके 2–2 के अंतराल पर संख्या लिखेंगे। जैसे– 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19। इसी तरह से 29 के लिए 3–3 के अंतराल पर। इनको देखकर यह नियम बनाया गया कि पहाड़ा चाहे 9 का हो, 19 का हो या 29 का हो हम पहले देखेंगे कि उसके निकटतम में कौन सी दहाई की संख्या है और फिर उतने के अंतराल पर ऊपर से नीचे की ओर 1 से शुरू करके संख्या लिखेंगे। जैसे 9 के लिए निकतम दहाई की संख्या 10 है तो 1–1 के अंतराल पर, 19 के लिए 20 है तो 2–2 के अंतराल पर, 29 के लिए 30 है तो 3–3 के अंतराल पर, आदि। पर इकाई के स्थान पर नीचे से उपर की तरफ हमेशा 0 से 9 तक की संख्याओं ही लिखी जाएगी। ध्यान रहे कि यह नियम केवल दो अंको की संख्याओं के लिए है जिनके इकाई के स्थान पर 9 आता है। चलिए इस के आधार पर कुछ संख्याओं के पहाड़े लिखकर देखते हैं–

39×1=39	49×1=49
39×2=78	49×2=98
39×3=117	49×3=147
39×4=156	49×4=196
39×5=195	49×5=245
39×6=234	49×6=294
39×7=273	49×7=343
39×8=312	49×8=392
39×9=351	49×9=441
39×10=390	49×10=490

इस तरह के नियम को देखकर मुझे ख्याल आया कि क्या पहाड़े के लिए हम 1 से 10 तक का ही गुणा करते हैं? क्या 10 के आगे का नहीं हो सकता? क्या कोई ऐसा नियम हो सकता है जिससे हम ऊपर दिये गए नियम को भी साबित कर सकें और 10 के आगे भी जा सकें? चलिए मिलकर सोचते हैं।

अगर हम 9 के पहाड़े को दहाई व इकाई के सामान्यीकृत रूप में लिखना चाहें तो इस प्रकार से लिख सकते हैं–

$10(x-1)+(10-x)$

इस सूत्र में पहला पद दहाई के लिए व दूसरा पद इकाई के लिए है। साथ ही 'x' का मान वह संख्या है जिससे 9 का गुणा करना है। उदाहरण के लिए 9x8 का मान ज्ञात करने के लिए हम 'x' का मान 8 रखेंगे जिससे प्राप्त संख्या

$10(8-1)+(10-8)=70+2=72$ होगी। इसी सूत्र को अगर हम 19 के लिए देखें तो वह इस प्रकार से होगा–

$10(2x-1)+(10-x)$

क्योंकि हम ऊपर चर्चा कर चुके हैं पहाड़ा चाहे 9 का हो, 19 का हो या 29 का हो हम पहले देखेंगे कि उसके निकटतम में कौन सी दहाई की संख्या है और फिर उतने के अंतराल पर ऊपर से नीचे की ओर संख्या लिखेंगे। इसी प्रकार 29 के लिए सूत्र कुछ इस प्रकार होगा–

$10(3x-1)+(10-x)$

इस तरह से हम बाकी संख्याओं जैसे 39, 49 आदि के लिए भी लिख सकते हैं। इस तरह से सूत्र लिखने का एक और बड़ा फायदा भी है। अगर हमें 9 x 12 करना हो तो हम क्या करेंगे? हम ऊपर बात कर रहे थे कि क्या पहाड़ा केवल 10 तक होता है तो हम 9 x 12 कैसे करें? अगर हम इसके सूत्र को देखें तो हम पायेंगे कि यहां 'x' का मान 12 हो गया है। यानि

$10(24-1)+(10-12)=230+(-2)=228$

अगर इसे आप अपने गुणा वाले तरीके से करेंगे तो भी क्या यही उत्तर आयेगा? करके देखिएगा। इसी तरह के कुछ और उदाहरण लेकर देखें जैसे– 39 x 18?

$10(4x-1)+(10-x)$

उदाहरण इस सूत्र में 'x' का मान 18 है यानि कि

$10(72\text{-}1) + (10 - 18) = 710 + (\text{-}8) = 702$

यहां 'x' का मान 18 से आगे का भी हो सकता है। उदाहरण के लिए $39x28$?

$10(4x\text{-}1) + (10 - x)$

उदाहरण इस सूत्र में x का मान 28 है यानि कि 10(112-1) + (10-28) = 1110+ (-18) = 1092 इन सब बातों को सामान्यीकरण की ओर ले जाएं तो सूत्र कुछ इस प्रकार बनता है– $10(ax - 1) + (10\text{-}x)$

इस सूत्र में पहला पद दहाई के लिए व दूसरा पद इकाई के लिए है। साथ ही 'x' का मान वह संख्या है जिससे 9 को गुणा करना है तथा 'a' मान जिस संख्या का पहाड़ा बना रहे हैं उसके निकटतम में कौन सी दहाई की संख्या है उसका दहाई का अंक लेंगे। उदाहरण के लिये 9 x 8 का मान ज्ञात करने के लिए हम 'x' का मान 8 रखेंगे तथा 'a' का मान 1 होगा। चूंकि 9 की निकटतम दहाई की संख्या 10 है और इसके दहाई के स्थान पर 1 है। इसी तरह से 109, 119, 129 आदि के लिए भी कोई सूत्र बन सकता है, जरा सोच कर देखें?

इन सभी उदाहरणों को देखकर लगता है कि पैटर्न पहचानना व बनाना गणित कितना महत्वपूर्ण हिस्सा है। ऐसा नहीं है कि यह अलग थलग चलता है परंतु इसके लिए तार्किक क्षमता व बीजगणितीय चिंतन भी अहम भूमिका अदा करते हैं। विद्यालयों में बच्चों को इस तरह से संख्याओं से खेलने के मौके मिलने चाहिए। जितना वो खेलेंगे। उतना ही उनकी सोच का गणितीकरण हो पायेगा। इस लेख में पहाड़ों को उदाहरण के लिए लिया गया है पर इसका मतलब यह नहीं है कि हम पहाड़ों की वकालत करते हैं या उसके खिलाफ हैं। इस तरह से अन्य उदाहरणों को लेकर पैटर्न को देखा जा सकता है।

(लेखक अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन से जुड़े हैं)

अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन पुस्तकालय सब के लिए

अज़ीम प्रेमजी फाउन्डेशन ने छपे हुए शब्दों की ताकत को पहचाना है। इसलिए उसका पुस्तकालय शिक्षा और ज्ञान की उसकी प्रसार योजना का एक महत्वपूर्ण भाग है। पूरे देश में जहां–जहां संस्थान के कार्यालय हैं वहां उनके पुस्तकालय भी स्थित हैं। इसी श्रृंखला में उत्तराखण्ड राज्य के राज्य संस्थान, जिला संस्थानों तथा विकास खण्ड स्तर पर खोले गए शिक्षक अधिगम केन्द्रों (टी.एल. सी.) में पुस्तकालय अहम स्थान रखते हैं जहां शिक्षकों, शिक्षक–शिक्षकों, युवाओं व बुजुर्गो से साथ साथ बच्चो का भी आना जाना लगा रहता है।

फिलहाल उत्तराखण्ड के देहरादून, उत्तरकाशी व ऊधमसिंह नगर के जिलों से शुरू होकर यह योजना अब उत्तराखण्ड के कुल ग्यारह जिलों (देहरादून, उत्तरकाशी, उधमसिंह नगर, अल्मोड़ा, बागेश्वर, चम्पावत, पिथोरागढ़, नैनीताल, श्रीनगर (पौड़ी), रुद्रप्रयाग व टिहरी को लगाकर) में पच्चीस जगहों पर संचालित होकर शिक्षा जगत में महत्वपूर्ण भूमिका निभा रही है।

अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन–पुस्तकालयों की सदस्यता निःशुल्क है। पुस्तकालयों में शैक्षिक–साहित्यिक पुस्तकें, बाल साहित्य, महत्वपूर्ण शैक्षिक रिपोर्ट, सी.डी., डी वी. डी., टी.एल.एम. (विज्ञान किट, गणित किट, ग्लोब... आदि) के साथ ऑनलाइन जर्नल्स के संस्करण भी उपलब्ध हैं जिनसे पाठकों को ज्ञान संग्रह में मदद मिल सके। यद्यपि पुस्तकालय सभी के लिए उपलब्ध है। लेकिन ये शिक्षकों को विशेष रूप से प्रोत्साहित करते हैं।

देहरादून : अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, 53, ई.सी. रोड़, देहरादून, फोन : 0135–2659864

उत्तरकाशी : अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, कुड़ियाल भवन, भटवाड़ी रोड, उत्तरकाशी–249193 फोन/फैक्स : 01374–222505

दिनेशपुर, उधमसिंह नगर : अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, वार्ड नं.3, निकट गुरुद्वारा, दिनेशपुर, उधमसिंह नगर

अल्मोड़ा : अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, लोअर माल रोड, कनार्टक खोला, निकट डायट, अल्मोड़ा–263601

पौड़ी : अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, दूसरा तल, भंडारी भवन, गोलाबाजार, श्रीनगर, पौड़ी गढ़वाल