फोटो– अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन

प्रारंभिक कक्षाओं की अवधारणाओं में अंतर्संबंध

– शालीन मिश्र

बच्चों के विचारों का गणितीयकरण, गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य है। 'सोच के कई तरीके हैं और जिस तरह की सोच कोई गणित में हासिल करता है वह है अमूर्त विचारों के साथ कार्य करना और समस्या समाधान के उपाय ढूंढना।'

पोजीशन पेपर ऑन टीचिंग ऑफ मैथमेटिक्स 2005 के अनुसार बच्चों के विचारों का गणितीयकरण, गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य है। 'सोच के कई तरीके हैं और जिस तरह की सोच कोई गणित में हासिल करता है वह है अमूर्त विचारों के साथ कार्य करना और समस्या समाधान के उपाय ढूंढना।' जिस बदलाव का प्रस्ताव यह दस्तावेज करता है वह है गणित की विषय वस्तु से गणित सीखने के वातावरण की ओर जाना जहां प्रक्रियाओं के पूरे विस्तार को महत्व दिया जाए और ये प्रक्रियाएं बच्चों के मस्तिष्क से गणित का भय निकालने में सहायक हो सकेंगी।'

गणित विषय की प्रकृति मूलतः अमूर्त होती है उदाहरण के लिए किसी को पांच के मायने समझाना। पांच का मूर्त रूप में कोई अस्तित्व नहीं होता पर हम इसे चीज़ों से जोड़कर देखते हैं जैसे 5 गेंद, 5 लोग या 5 बोतल आदि। इन सबमें एक सामान्य गुण है पांचपन का जो कि अपने आप में अमूर्तता लिए हुए है। गणित में एक अवधारणा दूसरी अवधारणा पर तार्किक रूप से विकसित होती है और हमें तर्क करने व विश्लेषण करने में मदद करती है। उदाहरण के लिए त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180° होता है क्योंकि त्रिभुज के तीनों कोणों को मिलाने पर वो एक सीधी रेखा बनाते हैं और चूंकि सीधी रेखा पर बनने वाला कोण 180° होता है इसलिए त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग भी 180° होगा। अगर मान लिया जाए कि सीधी रेखा पर बनने वाला कोण 200° है तो त्रिभुज के अंतः कोणों का योग भी 200° ही होगा।

गणित विषय की प्रकृति अमूर्त है व इसमें एक अवधारणा दूसरी अवधारणा पर तार्किक रूप से विकसित होती है और हमें तर्क करने व विश्लेषण करने में मदद करती है। अमूर्त प्रकृति व तार्किकता के कारण यह बहुत जरूरी हो जाता है कि इसके शिक्षण के तरीके भी कुछ भिन्न हों। साथ ही प्राथमिक स्तर की अवधारणाओं का उच्च प्राथमिक स्तर की अवधारणाओं के बीच अंतर्संबंध को समझना भी उतना ही जरूरी हो जाता है। यही कारण है कि आजकल प्रारंभिक स्तर पर ईएलपीएस सिद्धांत की बात हो रही है जो इस विषय की अमूर्तता को समझने में मदद करता है। इस सिद्धांत की समझ को इग्नू (IGNOU) की AMT के अध्याय 3 में विस्तृत रूप से

समझाया गया है। जिसके अनुसार सीखने के अनुभवों का क्रम होना चाहिए–

- **अनुभव–** ठोस वस्तुओं जैसे कंकड़, लकड़ियां आदि के साथ अनुभव
- **भाषा–** बोलकर अपने अनुभवों के बारे में बताना यानी कि भाषा का उपयोग
- **चित्र–** इस अनुभव को चित्रों द्वारा दिखाना
- **प्रतीक–** अनुभवों का लिखित प्रतीकों द्वारा व्यापकीकरण

आमतौर पर शिक्षकों का मानना है कि बीजगणित पढ़ाने की जिम्मेदारी तो उच्च प्राथमिक स्तर के शिक्षकों की ही है। क्या वाकई में ऐसा ही है? क्या आप भी ऐसा ही मानते हैं? या जब बीजों का उपयोग होता है तभी बीजगणित होती है? चलिए इस लेख में इसका उत्तर ढूंढने का प्रयास करते हैं।

इस लेख में मेरी कोशिश रहेगी कि आप लोगों का ध्यान इस बात पर दिलाया जा सके कि ई. एल. पी. एस. सिद्धांत का उपयोग हम किस प्रकार प्रारंभिक कक्षाओं की अवधारणाओं में अंतर्संबंध को समझने में कर सकते हैं। इसका केन्द्र बिंदु प्राथमिक स्तर के गुणा व गुणनखंड से उच्च प्राथमिक स्तर पर व्यजंकों के गुणा व गुणनखंड करने के बीच अंतर्संबंध को समझने पर होगा। इसके लिए बच्चों के साथ विभिन्न टीएलएम का उपयोग किया जा सकता है। इस प्रकार से टीएलएम का उपयोग बच्चों को बीजगणितीय चिंतन की ओर ले जाने में मदद करता है जिसके द्वारा बीजगणितीय अवधारणाओं को बीजगणितीय व ज्यामितीय रूप में समझने में मदद मिलती है।

बचपन में हम सब ने इस तरह के कई सारे खेल खेले होंगे। उदाहरण के लिए एक बच्चे का दूसरे बच्चे से पूछना–

- मन में कोई एक संख्या सोचो
- अब उसे दुगुना कर दो
- उसमें पांच जोड़ दो
- तुम उत्तर बताओ, संख्या मैं बताऊंगा।

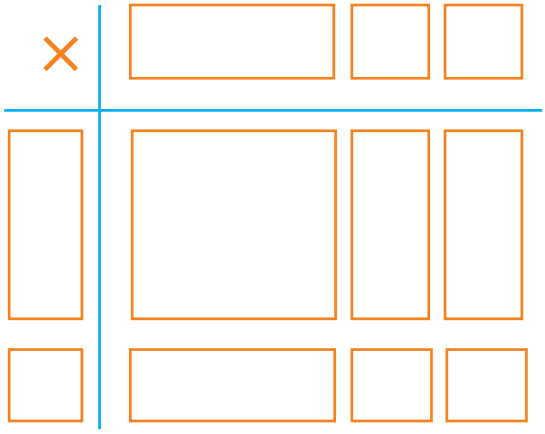
जब बच्चा उत्तर बताता है तो पहला बच्चा झट से उसकी सोची संख्या बता देता है। इसे देखें तो बीजगणित के रूप में इसे इस प्रकार से लिखा जाता है– $2x + 5 =$ ans पर जब बच्चे इसे प्राथमिक स्तर पर खेल रहे होते हैं तो वह निम्न प्रक्रिया अपनाते हैं–

- उत्तर में से पांच घटाना
- फिर उसे दो से भाग देना

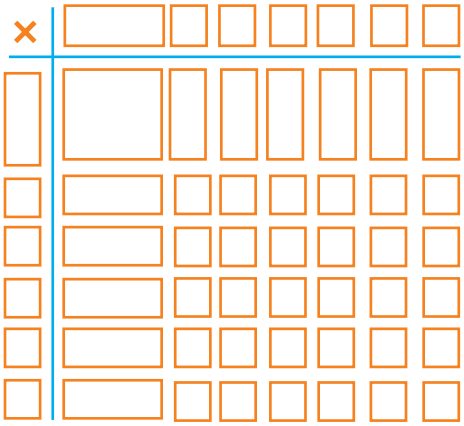
गौर से समझने का प्रयास करें तो यह ऊपर दिए गए समीकरण को ही हल करने की प्रक्रिया है जो हम जाने–अनजाने कर रहे होते हैं। इसी प्रकार जब हम बच्चों को कक्षा एक में ही इस तरह के सवाल हल करने को देते हैं और पूछते हैं कि पांच में कितना जोड़ें कि नौ हो जाए–

5 + _____ = 9

प्राथमिक स्तर पर इस तरह के कई सारे सवालों से बच्चे गुजरते हैं। जिसे बीजगणित में इस तरह से लिखते हैं– $5 + x = 9$। प्राथमिक स्तर पर बच्चों से बीजों के बारे में बात नहीं की जाती है पर इस तरह के तमाम सवाल बच्चों को कराए जाते हैं जहां कभी रिक्त स्थान बना होता है तो कई बार खाली बॉक्स। इसी तरह से पैटर्न के सवालों को लेकर भी प्राथमिक स्तर पर काम किया जाता है पर इनसे आगे के अंतर्संबंधों पर ध्यान नहीं दिया जाता। उदाहरण के लिए एनसीईआरटी की कक्षा पांच की किताब के सातवें पाठ में स्मार्ट जोड़ व मज़ा विषम संख्याओं का, के नाम से बीजगणितीय चिंतन की बात की जा रही है। क्योंकि जो हम स्मार्ट जोड़ की बात कर रहे हैं वो आगे चलकर कक्षा दस की किताब में समांतर श्रेणियों के नाम से आता है। इन सब पर काम करने के दौरान कहीं न कहीं बच्चों में बीजगणितीय चिंतन विकसित हो रहा होता है जिस पर हम सभी को ध्यान देने की जरूरत है ताकि बच्चों को आगे आने वाली अवधारणाओं को समझने में आसानी हो।



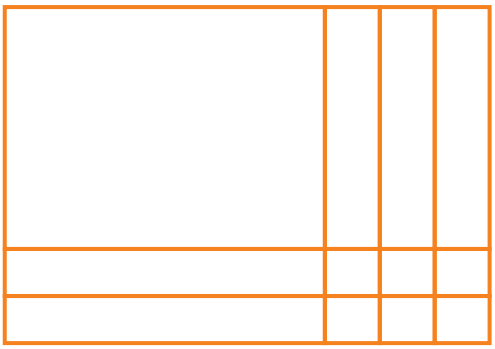
इस चर्चा को आगे बढ़ाते हुए अब हम प्राथमिक स्तर पर गुणा को लेकर बातचीत करेंगे और उच्च प्राथमिक स्तर पर उसके अंतर्संबंधों को समझने का प्रयास करेंगे। हम प्राथमिक स्तर पर डीन्स ब्लॉक्स को लेकर किस प्रकार काम करते हैं पहले उसे समझने का प्रयास करते हैं। जब हमें 11×12 करना हो तो हम डीन्स ब्लॉक्स से निम्न प्रकार से करते हैं–



जहां हमें उत्तर के रूप में 100 का एक, 10 के तीन व 1 के दो ब्लॉक्स प्राप्त हो रहे हैं जिनको जोड़ने पर हमें 132 प्राप्त होता है। अब अगर हम इकाई को इकाई मानें और 10 के ब्लॉक्स को x से प्रतिस्थापित करें तो 100 के ब्लॉक्स को x^2 से प्रतिस्थापित कर सकते हैं। इस तरह से $11 \times 12 = 132$ को $(x + 1) \times (x + 2) = x^2 + 3x + 2)$ लिखा जा सकता है। इसी तरह से हम 15×16 को लेकर भी बातचीत कर सकते हैं–

जब हम प्राथमिक स्तर पर बात करते हैं तो हम कहते हैं कि उत्तर के रूप में 100 का एक, 10 के ग्यारह व 1 के तीस ब्लॉक्स प्राप्त हो रहे हैं जिनको जोड़ने पर हमें 240 प्राप्त होता है क्योंकि 30 इकाई मिलकर 10 के तीन ब्लॉक्स बन जाते हैं इसलिए इकाई के स्थान पर शून्य आ

जाता है और 10 के चौदह ब्लॉक्स हो जाते हैं जो 100 का एक और ब्लॉक बन जाता है और 10 के चार रह जाते हैं जिस कारण उत्तर में 240 प्राप्त होता है। मगर सिद्धांत के रूप में देखे तो हम प्राप्त सभी ब्लॉक्स को जोड़ रह होते हैं बस लिखने के स्तर पर स्थानीय मान के नियम के अनुसार बदलाव करना होता है। इसी को जब हम उच्च प्राथमिक स्तर पर देखते हैं तो बीजगणित में प्राप्त ब्लॉक्स को भी जोड़ा जाता है पर वहां पदों के नियम के अनुसार बदलाव नहीं होता है जिस कारण $15 \times 16 = 1 \times 100 + 11 \times 10 + 30 \times 1 = 1 \times 100 + 14 \times 10 + 0 \times 1 = 200 + 40 + 0 = 240$ हो जाता है पर बीजगणित में पदों के नियम के अनुसार $(x+5) \times (x+6) = x^2 + 11x + 30$ ही लिखा जाता है। स्थानीय मान के नियम की तरह आपस में बदलाव नहीं होता है। इस तरह से अन्य उदाहरण लेकर अगर प्राथमिक स्तर पर काम होता है तो उसे उच्च प्राथमिक स्तर पर बीजगणितीय व्यजंकों के

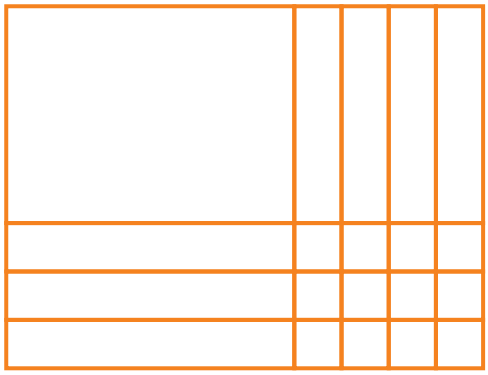


गुणा में कोई समस्या नहीं आती। हां, बस एक और अंतर आता है कि वहां ऋणात्मक संख्यायें भी आती हैं जबकि प्राथमिक स्तर पर केवल धन संख्याएं ही होती हैं।

इसी चर्चा को अगर आगे बढ़ाया जाए तो हम गुणनखंड को लेकर भी बातचीत कर सकते हैं। उदाहरण के लिए अगर बच्चों को 121 के गुणनखंड करने को कहा जाए तो इसके लिए बच्चों को 100 का एक ब्लॉक, 10 के दो व 1 का एक ब्लॉक देकर उनसे इस प्रकार जमाने को कहें कि एक वर्ग या आयत बन जाए। जो कुछ इस प्रकार बन सकता है–

चूंकि हर भुजा 11 इकाई की है इसलिए इसके गुणनखंड 11×11 हैं। इस उदाहरण को उच्च प्राथमिक स्तर पर दो

रूपों में समझा जा सकता है। एक तो कक्षा आठ में वर्ग व वर्गमूल के पाठ को समझना व दूसरा बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड को। पहले वर्गमूल को लेकर बातचीत करते हैं जो कि साफ दिखा रहा है कि 121 को वर्ग के रूप में जमा के हमें 11×11 मिल रहा है अतः 121 का वर्गमूल 11 है। दूसरा अगर हम इस बीजगणितीय रूप में समझें तो पता चलता है कि हर भुजा $x + 1$ है क्योंकि हमने 10 को x माना था। इस प्रकार 121 को बीजगणितीय रूप में इस



प्रकार लिखा जा सकता है– $x^2 + 2x + 1$ जिसके गुणनखंड हुए $(x+1)\ (x+1)$। इसी तरह अगर हम 156 को लेकर जमाने का प्रयास करें तो हमें 100 का एक ब्लॉक, 10 के पांच ब्लॉक और इकाई के 6 ब्लॉक लेकर जमाने हैं ताकि एक वर्ग या आयत बन सके जो कुछ इस प्रकार प्राप्त होता है–

चूंकि यहां एक भुजा 13 इकाई है व दूसरी 12 इकाई इसलिए इसके गुणनखंड 13×12 हैं। इस उदाहरण को ऊपर की भांति उच्च प्राथमिक स्तर पर दोनों रूपों में समझने का प्रयास करें तो हम देख सकते हैं कि यहां हमें एक आयत प्राप्त हो रहा है इसलिए 156 एक वर्ग संख्या नहीं है, वर्ग संख्या के लिए जमाने पर वर्ग ही मिलना चाहिए। दूसरा अगर हम इस बीजगणितीय रूप में समझें तो पता चलता है कि एक भुजा $x+3$ है और दूसरी $x+2$ क्योंकि हमने 10 को x माना था। इस प्रकार 156 को बीजगणितीय रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है– $x^2 + 5x + 6$ जिसके गुणनखंड हुए $(x+3)\ (x+2)$। इसे अन्य उदाहरणों द्वारा भी समझा जा सकता है। जैसे बच्चों को 172 के लिए 100 का एक, 10 के सात और इकाई के 2 ब्लॉक्स देकर उन्हें जमाकर वर्ग या आयत बनाने को कहें। उन्हें यह भी याद दिलाएं कि अगर वर्ग या आयत न बन रहा हो तो आप दहाई को इकाई में बदल सकते हो जैसे कि हमने गुणा करते समय स्थानीय मान के नियम के अनुसार इकाइयों को दहाइयों में बदला था। जिसे कुछ इस प्रकार जमाया जा सकता है जहां एक दहाई को इकाई में बदला गया है–

बीजगणितीय रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है– $x^2 + 7x + 12$ जिसके गुणनखंड हुए $(x + 4)\ (x + 3)$। इस प्रकार हम इसे अन्य अवधारणाओं के लिए भी देख सकते हैं।

अगर इस पूरे लेख के निहितार्थ की बात की जाए तो यह समझ में आता है कि प्राथमिक स्तर पर बच्चों को अभ्यास करने के भरपूर मौके दिए जाएं। शिक्षकों को भी इस अंतर्संबंध को समझना होगा तभी वो इस तरह के मौके बच्चों को उपलब्ध करवा पाएंगे। बच्चों को नई चुनौती के तौर पर डीन्स ब्लॉक्स का उपयोग कर अन्य अवधारणाओं में भी अंतर्संबंध ढूंढने का काम दिया जाना चाहिए। इस प्रकार वो अवधारणाओं के मध्य अंतर्संबंध ढूंढने का कौशल विकसित कर सकेंगे जो उन्हें आगे की कक्षाओं में भी गणित सीखने में मदद करेगा। डीन्स ब्लॉक से बीजगणित टाईल्स की ओर जाने में भी मदद मिलेगी क्योंकि Algebra Tiles व्यंजकों के गुणा को समझने में काफी मदद करता है। बच्चों को बीजगणितीय चिंतन करने व सवालों को ज्यामितीय रूप में सोचने में मदद मिलती है कि $x \times x$ मायने क्या होता है? ईएलपीएस सिद्धांत के चरणों से गुजरकर जाने से अवधारणा पुख्ता हो जाती है और लंबे समय तक बनी रहती है जो उसके अनुभवों में शामिल हो जाती है। इसे अन्य अवधारणाओं के लिए भी इस्तेमाल किया जाना चाहिए ताकि अवधारणाएं पुख्ता हों जिसका सीधा लाभ उसे विचारों के गणितीयकरण करने में मिले। वो वास्तविक दुनिया की समस्याओं को अपनी भाषा, अपने तरीकों और प्रतीकों के उपयोग से हल कर सके।

(लेखक, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन देहरादून, उत्तराखण्ड से जुड़े हैं।)